

## LAHENDUSED 9. KLASS

### 1. Vastus: Kõigile küsimustele ei vastanud 90 tüdrukut.

#### Lahendus:

Olgu küsimustele vastanud nii poisse kui ka tüdrukuid  $x$ . Sel juhul vastas küsimustikule kokku  $2x$  inimest.

Et neli viiendikku vastas kõikidele küsimustel, siis neid oli  $\frac{4}{5}2x = \frac{8}{5}x$ .

Poisse oli kõikidele küsimustele vastanute seas 240, mis moodustas neist  $\frac{3}{5}$ . Seega saame, et  $240 = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{5}x$ . Siit  $x = 250$ .

Seega küsimustikule üldse vastas 250 poissi ja 250 tüdrukut.

Kõikidele küsimustele vastas  $\frac{8}{5}x$ , mis oli  $\frac{8}{5} \cdot 250 = 400$ .

Järelikult  $400 - 240 = 160$  tüdrukut vastas kõikidele küsimustele ning  $250 - 160 = 90$  ei vastanud kõikidele küsimustele.

#### Hindamine:

Leitud küsimustikule vastanud poiste ja tüdrukute arv	3p
Leitud kui paljud vastasid kõikidele küsimustele	1p
Leitud kui paljud tüdrukud vastasid kõikidele küsimustele	2p
Leitud tüdrukute arv, kes ei vastanud kõikidele küsimustele	<u>1p</u>
	<b>7p</b>

Märkus: Antud vaid õige vastus 2p.

2. **Vastus: On viis võimalust selleks, mitu õpilast andis kaks, kolm ja neli õiget vastust ning need on vastavalt 5, 6, 4; 4, 8, 3; 3, 10, 2; 2, 12, 1 ning 1, 14 ja 0.**

**Lahendus:**

Olgu 2, 3 ja 4 õiget vastust andnud õpilaste arvud vastavalt  $x$ ,  $y$  ja  $z$ .

Kuna 20-st õpilasest viie tulemused on teada, siis  $x + y + z = 15$ .

Et kõikide saadud tulemuste aritmeetiline keskmine oli 3,5, siis

$(2x + 3y + 4z + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 1) : 20 = 3,5$ , millest  $2x + 3y + 4z = 44$ .

Siit näeme, et  $y$  peab kindlasti olema paarisarv.

Kuna tulemuste mood oli 3, siis  $y > 4$  ja  $y > x$  ja  $y > z$ .

Et mediaan oli ka 3, peab  $y > 5$ .

Seega vaatame võimalusi, kus  $y$  on 6, 8, 10, 12, 14.

Kui  $y = 6$ , siis  $x + z = 9$  ja  $2x + 3 \cdot 6 + 4z = 44$ ,  $2x + 4z = 26$ ,  $x + 2z = 13$ , millest saame  $z = 4$  ja  $x = 6$ .

Kui  $y = 8$ , siis  $x + z = 7$  ja  $2x + 3 \cdot 8 + 4z = 44$ ,  $2x + 4z = 20$ ,  $x + 2z = 10$ , millest saame  $z = 3$  ja  $x = 4$ .

Kui  $y = 10$ , siis  $x + z = 5$  ja  $2x + 3 \cdot 10 + 4z = 44$ ,  $2x + 4z = 14$ ,  $x + 2z = 7$ , millest saame  $z = 2$  ja  $x = 3$ .

Kui  $y = 12$ , siis  $x + z = 3$  ja  $2x + 3 \cdot 12 + 4z = 44$ ,  $2x + 4z = 8$ ,  $x + 2z = 4$ , millest saame  $z = 1$  ja  $x = 2$ .

Kui  $y = 14$ , siis  $x + z = 1$  ja  $2x + 3 \cdot 14 + 4z = 44$ ,  $2x + 4z = 2$ ,  $x + 2z = 1$ , millest saame  $z = 0$  ja  $x = 1$ .

**Hindamine:**

Aritmeetilise keskmise kaudu leitud kõikide kaks, kolm ja neli õiget vastust saanud õigete vastuste summa

2p

Tähelepanek, et kolm õiget vastust saanute arv peab olema paarisarv

1p

Moodi ja mediaani abil näidatud, et kolm õiget vastust saanud õpilaste arv peab olema suurem kui 5

1p

Läbivaadatud ja leitud kõik võimalused

3p

7p

Märkus: Vastuseks kirjutatud vaid kõik viis võimalust: 2p

Kui ei ole tehtud tähelepanekuid ja on lihtsalt järjest kõik variandid arvutamiste teel leitud, anda ikka 7p. (Seejuures on jälgitud vaid seda, et õpilaste koguarv on 20.)

3. Vastus: Kati tahab  $16\frac{2}{3}\%$  lillepeenardega kaetud alast katta muruga.

**Lahendus:**

Olgu esialgu muruga kaetud ala pindala  $M$  ja lillepeenardega kaetud ala pindala  $L$ .

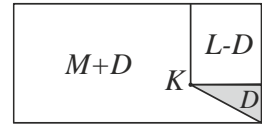
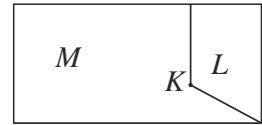
Kuna lillepeenardega kaetud ala on muruga kaetud alast 4 korda väiksem, siis  $4 \cdot L = M$ .

Olgu selle kolmnurga, mis praegu on peenardega kaetud ja pärast muruga, pindala  $D$ .

Sel juhul on Kati sooviks, et  $M + D = 5(L - D)$  ehk  $M + D = 5L - 5D$ .

Kuna  $4 \cdot L = M$ , siis  $4L + D = 5L - 5D$  ehk  $6D = L$ .

Seega ala, mida Kati soovis muruga katta, moodustab  $\frac{1}{6}$  lillepeenardega kaetud osast, mis on  $16\frac{2}{3}\%$  praegusest alast.



**Hindamine:**

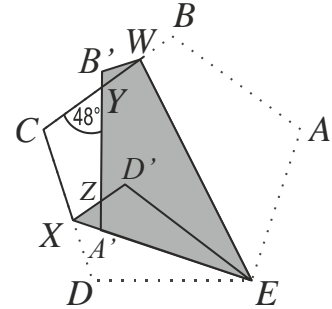
Kirja pandud praegune suhe muruga ja peenardega kaetud alade vahel	1p
Avaldatud plaanitav suhe muruga ja peenardega kaetud alade vahel	3p
Leitud kui suure osa peenardega kaetud alast soovib ta katta muruga	2p
Leitud mitu protsenti peenardega kaetud alast soovib ta katta muruga	<u>1p</u>
	<b>7p</b>

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p

**4. Vastus: Nelinurga kolme ülejäänud nurga suurused on  $108^\circ$ ,  $84^\circ$  ja  $120^\circ$**

**Lahendus:**

Tähistame esialgse viisnurga tipud tähtedega  $A, B, C, D$  ja  $E$  joonisel näidatud viisil. Olgu esimene voltejoon  $WE$  ja teine  $XE$ . Tippude  $A, B$  ja  $D$  uued asukohad märgime vastavalt  $A', B'$  ja  $D'$ . Lisaks tähistame  $CB$  ja  $B'A'$  lõikepunkti tähega  $Y$  ja  $B'A'$  ja  $XD'$  lõikepunkti tähega  $Z$ .



Valge nelinurk on  $CXZY$ .

Valge nelinurga nurk  $YCX$  on võrdne korrapärase viisnurga sisenurgaga.

Korrapärase viisnurga ühe sisenurga suurus on  $(5 - 3) \cdot 180^\circ : 5 = 108^\circ$ .

Seega  $\angle YCX = 108^\circ$ .

Tõmbame joonisele lisaks lõigud  $YW$  ja  $ZA'$ .

Vaatame kolmnurka  $YB'W$ . Selle nurk  $B'YW$  on nurga  $CYA'$  tipunurk ja seega ka suurusega  $48^\circ$  ning nurk  $YB'W$  on korrapärase viisnurga sisenurk. Kolmnurga sisenurkade summast saame, et  $\angle B'WY = 180^\circ - 48^\circ - 108^\circ = 24^\circ$ .

Konstruksiooni tõttu on nurkade  $CWE$  ja  $BWE = B'WE = B'WY + CWE$  summa sirgnurk. Kuna leidsime, et nurk  $B'WY = 24^\circ$ , siis saame  $180^\circ = 24^\circ + \angle CWE + \angle CWE$ , millest  $\angle CWE = 78^\circ$  ja  $\angle B'WE = 24^\circ + 78^\circ = 102^\circ$ .

Vaatame nüüd nelinurka  $B'WEA'$ . Selle kolme nurga suurused on teada ja saame leida nelinurga sisenurkade summa järgi nurga  $A'EW$ . Seega

$$\angle A'EW = 360^\circ - \angle EA'B' - \angle A'B'W - \angle B'WE = 360^\circ - 108^\circ - 108^\circ - 102^\circ = 42^\circ.$$

Näeme, et  $\angle DEA' + \angle A'EW + \angle WEA = 108^\circ$  ja kuna konstruktsiooni tõttu

$$\angle A'EW = \angle WEA, \text{ siis } \angle DEA' = 108^\circ - 2 \cdot \angle A'EW = 108^\circ - 2 \cdot 42^\circ = 24^\circ.$$

Konstruksiooni tõttu  $\angle DEA' = \angle A'ED'$ .

Vaatleme nüüd kolmnurka  $XD'E$ . Kolmnurga sisenurkade summa põhjal

$$\angle D'XE = 180^\circ - \angle XD'E - \angle XED' = 180^\circ - 108^\circ - 24^\circ = 48^\circ.$$

Konstruksiooni põhjal  $180^\circ = \angle CXD' + \angle D'XD$  ja  $\angle D'XE = \angle EXD$ .

$$\text{Järelikult } 180^\circ = \angle CXD' + \angle D'XE + \angle EXD = \angle CXD' + 2\angle D'XE = \angle CXD' + 2 \cdot 48^\circ.$$

Siit leiame, et  $\angle CXD' = 180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$ .

Et nelinurga sisenurkade summa on  $360^\circ$ , siis

$$\angle XZY = 360^\circ - \angle XCY - \angle CYZ - \angle ZXC = 360^\circ - 108^\circ - 48^\circ - 84^\circ = 120^\circ.$$

**Hindamine:**

Leitud valge nelinurga selle nurga suurus, mis on ka viisnurga sisenurgaks	1p
Märgatud, millised nurgad on veel konstruktsioonist tulenevalt suurusega $108^\circ$	1p
Leitud valge nelinurga teise teravnurga suurus	4p
Leitud valge nelinurga teise nürinurga suurus	<u>1p</u>
	<b>7p</b>

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p.

## 5. Vastus: Erinevaid tabelleid on 384.

### Lahendus:

Paneme kirja kolmest reast ja kolmest veerust moodustuvate kolmekohaliste arvude summa:

$$\begin{aligned}(900 + 10b + c + 100d + 10e + f + 100g + 10h + i) + \\ + (900 + 10d + g + 100b + 10e + h + 100c + 10f + i) = \\ = 1800 + 110d + 110b + 101g + 101c + 11f + 11h + 20e + 2i \\ = 1800 + 110(d + b) + 101(g + c) + 11(f + h) + 20e + 2i\end{aligned}$$

On teada, et saadud avaldis jagub arvuga 11.

Kuna  $110(d + b)$ ,  $11(f + h)$  jaguvad alati arvuga 11 ning kuna teada on, et  $g + c = 11$ , siis ka  $101(g + c)$  jagub arvuga 11, siis selleks, et kogu avaldis jaguks arvuga 11 on vaja, et  $1800 + 20e + 2i = 2(900 + 10e + i)$  jaguks arvuga 11. Sellest saame, et  $900 + 10e + i$  peab jaguma arvuga 11.

Avaldis  $900 + 10e + i$  tähistab kolmekohalist arvu, mis on arvust 900 suurem ja mille kümneliste ja üheliste numbrid peavad olema erinevad ja kumbki neist ei ole 9 ega 0.

Kõik arvust 900 suuremad kolmekohalised arvud, mis jaguvad arvuga 11 on:

990, 979, 968, 957, 946, 935, 924, 913, 902. Kuna kümneliste ega üheliste number ei saa olla 0 ja 9, siis jääb alles kuus varianti: 968, 957, 946, 935, 924 ja 913.

Variandid on:

- 1)  $e = 6$  ja  $i = 8$ ;
- 2)  $e = 5$  ja  $i = 7$ ;
- 3)  $e = 4$  ja  $i = 6$ ;
- 4)  $e = 3$  ja  $i = 5$ ;
- 5)  $e = 2$  ja  $i = 4$ ;
- 6)  $e = 1$  ja  $i = 3$ .

Vaatame edasi. Teame, et  $g + c = 11$ . Kuna tähed tuleb asendada numbrita 1 kuni 8, siis võimalused on  $8 + 3$ ,  $3 + 8$ ,  $7 + 4$ ,  $4 + 7$  ja  $6 + 5$ ,  $5 + 6$ .

Kui

- 1)  $e = 6$  ja  $i = 8$ , siis  $g + c$  on kas  $7 + 4$  või  $4 + 7$ .  
Ülejäänud neljale tähele  $b$ ,  $d$ ,  $f$  ja  $h$  vastavad siis numbrid 1, 2, 3, 5. Seejuures pole tähtis milline number millisele tähele vastab. Nelja numbrit on võimalik neljale kohale paigutada 24 erineval viisil.  
Seega kui  $e = 6$  ja  $i = 8$ , siis on võimalik saada  $2 \cdot 24$  erinevat tabelit.
- 2)  $e = 5$  ja  $i = 7$ , siis  $g + c$  on kas  $8 + 3$  või  $3 + 8$ . Analoogselt juhule 1) saame et erinevaid tabelleid on  $2 \cdot 24$ .
- 3)  $e = 4$  ja  $i = 6$ , siis  $g + c$  on kas  $8 + 3$  või  $3 + 8$ . Analoogselt juhule 1) saame et erinevaid tabelleid on  $2 \cdot 24$ .
- 4)  $e = 3$  ja  $i = 5$ , siis  $g + c$  on kas  $7 + 4$  või  $4 + 7$ . Analoogselt juhule 1) saame, et erinevaid tabelleid on  $2 \cdot 24$ .

- 5)  $e = 2$  ja  $i = 4$ , siis  $g + c$  on kas  $8 + 3, 3 + 8$  või  $6 + 5, 5 + 6$ . Siin saame, et erinevaid tabeleid on  $4 \cdot 24$ .
- 6)  $e = 1$  ja  $i = 3$ , siis  $g + c$  on kas  $7 + 4, 4 + 7$  või  $6 + 5, 5 + 6$ . Siin saame, et erinevaid tabeleid on  $4 \cdot 24$ .

Erinevaid tabeleid on kokku  $4 \cdot 2 \cdot 24 + 2 \cdot 4 \cdot 24 = 16 \cdot 24 = 384$ .

**Hindamine:**

Kirjutatud välja ridades ja veergudes olevate arvude summa	1p
Näidatud, et $900 + 10e + i$ peab jaguma arvuga 11	2p
Leitud kõik võimalused $e$ ja $i$ jaoks	1p
Leitud kõik võimalused $g$ ja $c$ jaoks	1p
Leitud erinevate tabelite arv	<u>2p</u>
	<b>7p</b>